

Testul numărul 9

Subiectul I (30 puncte)

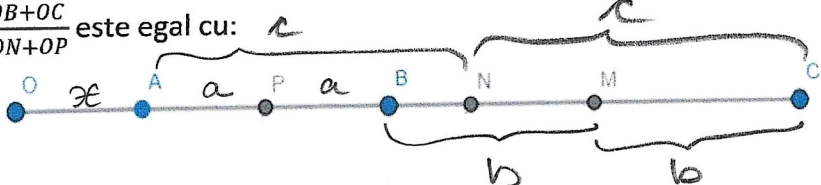
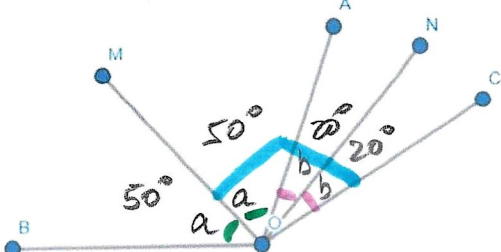
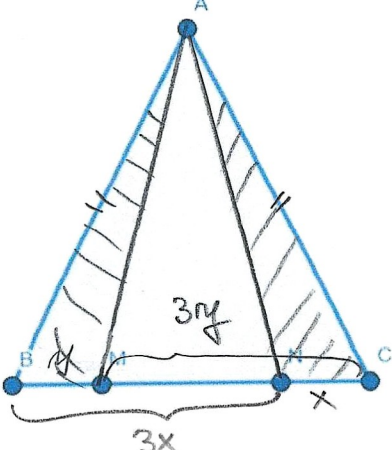
5p	1. Suma numerelor prime care divid numărul 2025 este: a) 18; b) 8; c) 25; d) 20. $2025 = 5^2 \cdot 3^4$ $5 + 3 = 8$
5p	2. Media geometrică a numerelor a și b, unde $a = \sqrt{162} - \sqrt{50} + \sqrt{32} - \sqrt{98}$ și $b = \sqrt{200} - \sqrt{98} + \sqrt{72} - \sqrt{18}$ este egală cu: a) 4; b) 2; c) $3\sqrt{2}$; d) $2\sqrt{3}$. $a = \sqrt{2}$ $b = 6\sqrt{2}$ $\Rightarrow$ med = $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$
5p	3. Prețul unui obiect se micșorează cu $p\%$ și ajunge să coste 272 lei. Dacă prețul inițial a fost 320 lei, atunci p este: a) 15; b) 18; c) 16; d) 14. $320 - p\% \cdot 320 = 272$ $\frac{p}{100} \cdot 320 = 48 \Rightarrow p = \frac{480}{32} = 15$
5p	4. Rezultatul calculului $\left[2025 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2026} \right) \right] : \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \dots + \frac{2025}{2026} \right)$ este: a) $\frac{1}{2026}$; b) 1; c) 0; d) $\frac{1}{2025}$. $\uparrow$ 1+1+1+1 2025 fractu $(1 - \frac{1}{2}) + (1 - \frac{1}{3}) + \dots + (1 - \frac{1}{2026}) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \dots + \frac{2025}{2026}$
5p	5. Suma numerelor naturale de forma $\overline{xy}$, cu $\sqrt{xy} + \sqrt{yx} + 14(x+y) \in \mathbb{N}$ este egală cu: a) 625; b) 462; c) 726; d) 550. $x+y \in \{4, 9, 16\}$ pt ca $\sqrt{25(x+y)} = 5\sqrt{x+y}$ $31+22+13+8+12+63+54+45+36+27+184$ $+ 97+88+79 = 726$
5p	6. Ana afirmă că: A <u>conține</u> doar două pătrate perfecte, unde $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 3x+1 \mid 2x+5\}$. Afirmatia Anei este: a) Adevărată; b) Falsă. $3x+1 \mid 2x+5 \mid 3 \Rightarrow 3x+1 \mid 6x+15$ $\text{dar } 3x+1 \mid 3x+1 \cdot 2 \quad 3x+1 \mid 6x+2$ $3x+1 \mid 13$ $3x+1 \in \mathcal{D}_{13} = \{-1; -13; 13; 1\} \Rightarrow$ $3x \in \{-2; -14; 12; 0\} \Rightarrow$ $x \in \{-\frac{2}{3}; -\frac{14}{3}; 4; 0\}$ dar $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow A = \{0; 4\}$

$$3x+1 \in \mathcal{D}_{13} = \{-1; -13; 13; 1\} \Rightarrow$$

$$3x \in \{-2; -14; 12; 0\} \Rightarrow$$

$$x \in \{-\frac{2}{3}; -\frac{14}{3}; 4; 0\}$$
 dar $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow A = \{0; 4\}$

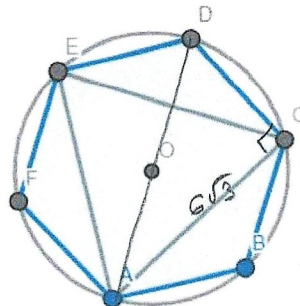
Subiectul II (30 puncte)

5p	1. În figura alăturată sunt reprezentate punctele distincte O, A, B, C în această ordine. Punctele M, N și P sunt mijloacele segmentelor BC, CA și AB. Valoarea raportului $\frac{OA+OB+OC}{OM+ON+OP}$ este egal cu:  a) 1,5; b) 0,5; c) 2; d) 1. $\frac{x + (x+2a) + (x+2c)}{(x+2a+b) + (x+c) + (x+a)} = \frac{3x+2a+2c}{3x+3a+b+c}$ $\text{Obs că } 2a+2b=2c \Rightarrow c=a+b$ $= \frac{3x+2a+2a+2b}{3x+3a+b+a+b} = \frac{3x+4a+2b}{3x+4a+2b} = 1$
5p	2. În figura alăturată unghiurile AOB și AOC sunt adiacente. Bisectoarea OM a lui $\angle AOB$ este perpendiculară pe OC, iar ON este bisectoarea lui $\angle AOC$. Dacă măsura $\angle MON = 70^\circ$, atunci măsura $\angle AOB - \angle AOC$ este egală cu: a) 45°; b) 40°; c) 50°; d) 60°.  $a+b=70^\circ$ $a+2b=90^\circ$ $\Rightarrow b=20^\circ$ $100^\circ - 40^\circ = 60^\circ$
5p	3. În figura alăturată este reprezentat un triunghi isoscel ABC cu baza BC; punctele M, N $\in$ BC astfel încât $\frac{BM}{MC} = \frac{CN}{NB} = \frac{1}{3}$. Valoarea expresiei $\frac{MN}{BC} + \frac{AM}{AN}$ este egală cu: a) $\frac{4}{3}$; b) $\frac{3}{2}$; c) $\frac{5}{3}$; d) 2.  $4x = 4y = BC$ $x=y$ $MN = 2x$ $BC = 4x$ $\triangle AMN$ is $\Rightarrow \frac{AM}{AN} = 1$ Comp $\triangle AMB$ LUL $\triangle ANC$ $\frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$

- 5p 4. Fie cercul $C(O, 6)$ și hexagonul regulat înscris în cerc. Aria triunghiului ACE este egală cu:

- a) $9\sqrt{6} \text{ cm}^2$;
b) $27\sqrt{3} \text{ cm}^2$;
c) $18\sqrt{3} \text{ cm}^2$;
d) $36\sqrt{2} \text{ cm}^2$.

$l_{\text{hex}} = R_{\text{circ}}$
AD diam = 12
 $DC = 6 \Rightarrow AC = 6\sqrt{3}$



$$A_{\triangle ACE} = \frac{(6\sqrt{3})^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{36 \cdot 3 \sqrt{3}}{4} = 27\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}$$

- 5p 5. În figura alăturată este reprezentat un trapez ABCD, iar $M \in AB$, astfel încât $A_{AMC} = A_{ACD} + A_{BMC}$. Dacă $AB = CD + x \cdot MB$, atunci valoarea lui x este egală cu:

- a) $\frac{5}{2}$;
b) $\frac{3}{2}$;
c) 1;
d) 2.

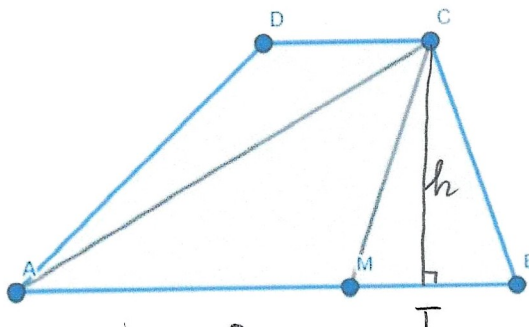
$\frac{1}{2} \cdot A_{\text{trapez}}$
 $A_{\text{trapez}} = \frac{(AB+CD) \cdot h}{2}$

$A_{AMC} = \frac{h \cdot AM}{2}$

$A_{\triangle CMB} = \frac{h \cdot MB}{2}$

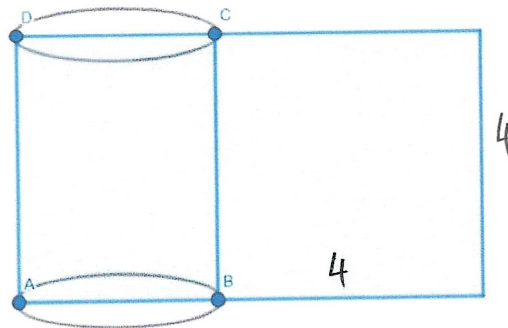
$A_{\triangle ADC} = \frac{h \cdot DC}{2}$

$\frac{AM \cdot h}{2} = \frac{h \cdot DC}{2} + \frac{h \cdot MB}{2} \quad | : \frac{h}{2} \Rightarrow AM = DC + MB$
 $AB = AM + MB = DC + MB + MB = DC + 2MB$
 $x = 2$



- 5p 6. În figura alăturată este reprezentat un cilindru circular drept, cu desfășurarea laterală un pătrat cu latura de 4 cm, volumul cilindrului este:

- a) $\frac{16}{\pi} \text{ cm}^3$;
b) $\frac{8}{\pi} \text{ cm}^3$;
c) $\frac{64}{\pi} \text{ cm}^3$;
d) $16\pi \text{ cm}^3$.



$2\pi R = 4 \Rightarrow$

$\pi R = 2$

$R = \frac{2}{\pi}$

$V = \pi R^2 \cdot h$; $V = \pi \cdot \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \cdot 4 = \frac{16}{\pi}$

Subiectul III (30 puncte)

5p

1. Petru a cumpărat de la o librărie caiete, pixuri și creioane. Prețul unui pix este egal cu 75% din prețul unui caiet, iar prețul unui creion este egal cu 40% din prețul unui pix.

- a) Este posibil ca prețul a opt pixuri să fie egal cu prețul a cinci caiete? Justificați răspunsul dat.
- b) Dacă Petru a plătit pentru 3 caiete, 4 pixuri și 5 creioane suma de 90 lei, determină prețul unui pix.

a) $c = \text{pret caiet.}$
 $p = \text{ " pix}$
 $cr = \text{ " creion}$

$$p = \frac{75}{100} \cdot c = \frac{3c}{4} \Rightarrow 4p = 3c$$

$$cr = \frac{40}{100} \cdot p = \frac{2p}{5}$$

$$4p = 3c \quad | \cdot 2 \Rightarrow 8p = 6c \neq 5c \quad \text{deci, nu e pos.}$$

b) $3c + 4p + 5cr = 90$
 $4p + 4p + 2p = 90 \Rightarrow 10p = 90$
 $p = 9 \text{ lei.}$

5p

2. Fie $E(x) = \left(\frac{x+2}{x-4} + \frac{3x^2+x-4}{16-x^2} + \frac{3x-1}{x+4} \right) : \frac{2x^2-32}{x^2+8x+16}$, unde $x \in \mathbb{R}/\{-4,4\}$.

a) Aduceți expresia la forma cea mai simplă.

b) Arătați că suma $S = E(x) + [E(x)]^2 + [E(x)]^3 + \dots + [E(x)]^{2026}$ este subunitară.

$$E(x) = \left[\frac{x+2}{x-4} - \frac{3x^2+x-4}{(x-4)(x+4)} + \frac{x-4}{3x-1} \right] \cdot \frac{(x+4)^2}{2(x-4)(x+4)}$$

$$E(x) = \frac{x^2+6x+8-3x^2-x+4+2x^2-x-12x+4}{(x-4)(x+4)} \cdot \frac{(x+4)^2}{2(x-4)(x+4)}$$

$$E(x) = \frac{x^2-8x+16}{2(x-4)^2} = \frac{(x-4)^2}{2 \cdot (x-4)^2} = \frac{1}{2}$$

$$b) S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{2026}} = \frac{2^{2025} + 2^{2024} + \dots + 1}{2^{2026}}$$

$$= \frac{2^{2026} - 1}{2^{2026}} < 1 \text{ pt că } 2^{2026} - 1 < 2^{2026} \text{ „A”}$$

$$M = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{2025} \quad | \cdot 2$$

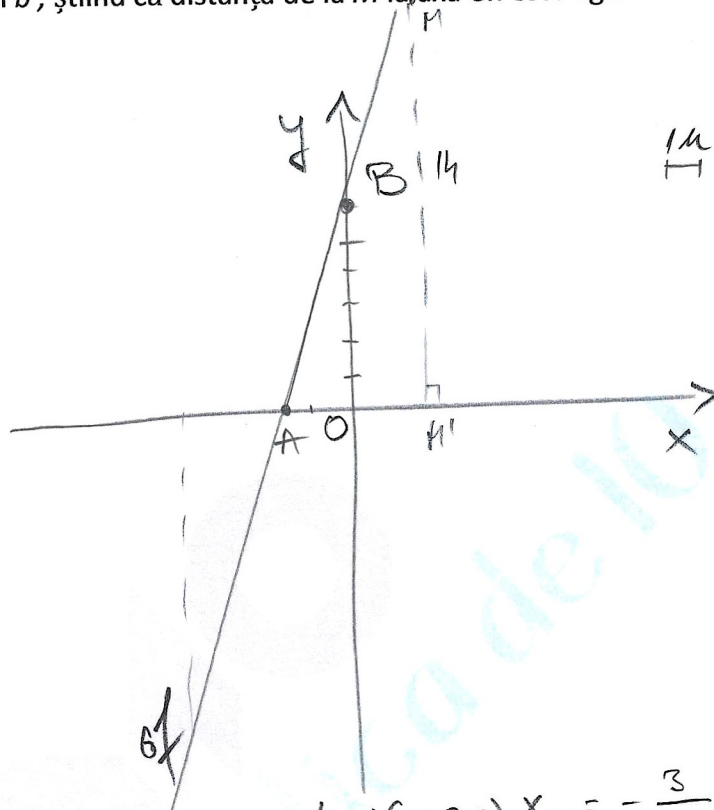
$$2M = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2026} \quad (-)$$

$$M = 2^{2026} - 1$$

5p

3. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 4x + 6$.

- a) Trasați graficul funcției într-un sistem de axe de coordonate xOy .
b) Punctul $M(a;b)$ este situat pe graficul funcției f . Determinați numerele întregi a și b , știind că distanța de la M la axa Ox este egală cu 14.



$$a) \begin{cases} A = G_f \cap Ox \Rightarrow y_A = 0 \Rightarrow 4x_A + 6 = 0 \Rightarrow x_A = -\frac{3}{2} ; A(-\frac{3}{2}; 0) \\ B = G_f \cap Oy \Rightarrow x_B = 0 \Rightarrow f(0) = 6 \Rightarrow B(0; 6) \end{cases}$$

$$b) M(a; b) \in G_f \Rightarrow 4a + 6 = b \Rightarrow M(a; 4a + 6)$$

pe $MM' \perp Ox \Rightarrow M'(x_M, 0) \quad x_M = a \quad M'(a, 0)$
 $M' \in (Ox)$

$$MM' = \sqrt{(a-a)^2 + (4a+6)^2} = 14 \Rightarrow |4a+6| = 14 \Rightarrow$$

$$4a+6=14$$

$$4a=8$$

$$a=2$$

$$M_1(2; 14)$$

sau

$$4a+6=-14$$

$$4a=-20$$

$$a=-5$$

sau

$$M_2(-5; -14)$$

5p

4. În figura alăturată este reprezentat un pătrat ABCD cu $AB = 75$ cm, $E \in (AD)$, $F \in (EC)$ și $G \in (AB)$ astfel încât $\frac{EF}{EC} = \frac{2}{5}$. Dacă $GB = 18$ cm și $GF = 45$ cm.

- a) Calculați perimetrul patrulaterului AGFE;
b) Află aria patrulaterului AGFE.

Problemă de calcul, culegere de probleme de geometrie, 1902.

fiu $FM \perp AB$; $CP \perp AB \Rightarrow FM \parallel CP$
 $EP \perp BC$

$FM \cap EP = \{N\}$

$\triangle ENF \sim \triangle EPC$ (UU)

$$\frac{EN}{EP} = \frac{EF}{EC} = \frac{FN}{PC}$$

$$\frac{EN}{75} = \frac{2}{5} = \frac{FN}{CP}$$

$$\Rightarrow EN = \frac{75 \cdot 2}{5} = 30 \Rightarrow NP = 45$$

$\triangle FMG$ dr. în $\hat{M} \Rightarrow FM = 36$

$$\frac{FN}{CP} = \frac{2}{5} \Rightarrow FN = 2k \Rightarrow NM = 36 - 2k = PB \Rightarrow BC = 5k + 36 - 2k = 75$$

$$3k = 39$$

$$k = 13$$

$$\Rightarrow FN = 26 \text{ (cm)} \Rightarrow CP = 65 \text{ (cm)} \Rightarrow PB = EA = 36 - 26 = 10$$

$$\triangle ENF \text{ dr. în } \hat{N} \xrightarrow{T.P.T.} EF^2 = EN^2 + FN^2$$

$$EF^2 = 900 + 676 \Rightarrow EF = \sqrt{1576} = \sqrt{4 \cdot 394} = 2\sqrt{394}$$

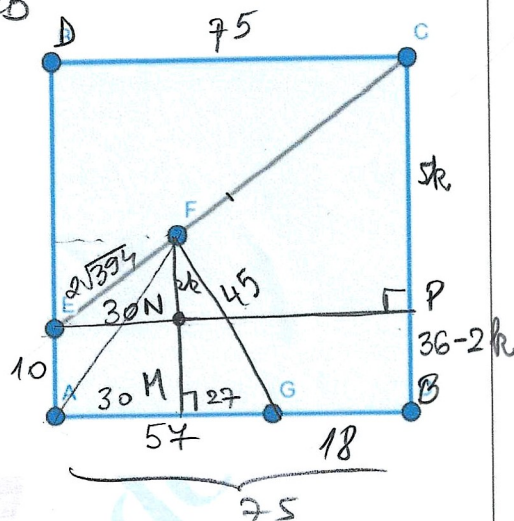
$$P_{AGFE} = AG + GF + FE + AE \Rightarrow 57 + 45 + 2\sqrt{394} + 10 = 112 + 2\sqrt{394} \text{ (cm)}$$

b) $A_{AGFE} = A_{AGF} + A_{AEF}$

$$= \frac{FM \cdot AG}{2} + \frac{EA \cdot d(F, EA)}{2}$$

$$= \frac{36 \cdot 57}{2} + \frac{10 \cdot 30}{2} = 1026 + 150$$

$$= 1176 \text{ (cm}^2\text{)}$$



$$\frac{75-18}{57}$$

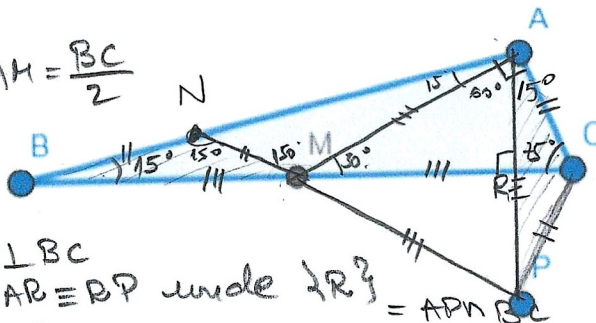
5p

5. În figura alăturată este reprezentat un triunghi ABC cu $\angle B = 15^\circ$ și $\angle C = 75^\circ$. Considerăm M mijlocul lui BC și punctul N pe latura AB astfel încât $BN = AC$, P simetricul lui A față de BC.

a) Stabiliți natura triunghiului AMP.

b) Determinați măsura unghiului AMN.

a) $\triangle ABC$ drept în $\hat{A}$
pt că $\hat{B} + \hat{C} = 90^\circ$
AM mediană $\Rightarrow AM = \frac{BC}{2}$



$P = \min_{BC} A \Rightarrow AP \perp BC$

și $AB \equiv BP$ unde $\{R\} = AP \cap BC$

$\triangle AMB$ isoscel în $\hat{M} \Rightarrow \angle BMA = 150^\circ \Rightarrow \angle AMR = 30^\circ$
 $\angle ARM = 90^\circ$

$\Rightarrow AR = \frac{1}{2} \cdot AM$ dar $AR = RP \Rightarrow AP = AM \Rightarrow \triangle AMP$ isoscel
dar $\angle MAP = 60^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle AMP$ echilateral

b) $\angle CAR = 90^\circ - 15^\circ - 60^\circ = 15^\circ$
pt că $\begin{cases} BM = AM \\ AM = AP \end{cases} \Rightarrow BM = AP$

Comparăm $\triangle NBM$ și $\triangle CAP$ $\begin{cases} BN = AC \text{ (ip)} \\ BM = AP \text{ (dem)} \\ \angle NBM = \angle CAP \text{ (dem)} \end{cases} \xRightarrow{LUL} \triangle NBM \equiv \triangle CAP$

$\Rightarrow \begin{cases} NM \equiv CP \\ \angle BNM = \angle ACP = 150^\circ \\ \angle NMB = \angle CPA = 15^\circ \end{cases} \Rightarrow \hat{AMN} = \angle CMB - \angle CMA - \angle BMN$

$$\begin{aligned} &= 180^\circ - 30^\circ - 15^\circ \\ &= 180^\circ - 45^\circ \\ &= 135^\circ \end{aligned}$$

5p

6. În prisma triunghiulară regulată dreaptă $ABCA'B'C'$, cu $AB = 12$ cm și $AA' = 6\sqrt{3}$ cm.

- Calculați aria totală și volumul prisme;
- Arătați că planele $(A'BC)$ și $(AB'C')$ sunt perpendiculare.

$$a) A_t = A_l + 2A_b$$

$$A_l = P_b \cdot h$$

$$A_l = 3 \cdot 12 \cdot 6\sqrt{3} = 216\sqrt{3} (\text{cm}^2) \quad 6\sqrt{3}$$

$$A_b = \frac{144\sqrt{3}}{4} = 36\sqrt{3} (\text{cm}^2)$$

$$A_t = 216\sqrt{3} + 72\sqrt{3} = 288\sqrt{3} (\text{cm}^2)$$

$$V = A_b \cdot h ; V = 36\sqrt{3} \cdot 6\sqrt{3} = 648 (\text{cm}^3)$$

$$b) (A'BC) \cap (AB'C') = MN \text{ unde } \begin{cases} M \in A'B \cap AB' \\ N \in AC' \cap A'C \end{cases}$$

$$MN \parallel BC \parallel B'C'$$

$$\Delta A'BA \text{ dreptunghi } \hat{A} \Rightarrow A'B = \sqrt{144 + 108} = \sqrt{252} = 6\sqrt{7} (\text{cm})$$

$$\Rightarrow A'M = A'N = 6\sqrt{7} \left(\frac{1}{2} \cdot \text{diagonal} \right)$$

$$\Delta ANM \text{ isoscel; } \text{fie } O \text{ - mijlocul lui } MN \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} A'O \perp MN \\ AO \perp MN \end{array} \right\} \Rightarrow \angle((A'BC), (AB'C')) = \angle(A'O, AO) = \angle A'OA$$

$$MN \text{ - linie mijloc } \Delta AB'C' \Rightarrow MN = 6 \Rightarrow MO = ON = 3 \text{ cm}$$

$$\Delta AOM \text{ dreptunghi } \hat{O} \Rightarrow AO = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{3^2 + 6} = 3\sqrt{6}$$

$$A'O = AO = 3\sqrt{6}$$

$$\text{R.T.P.H. } (3\sqrt{6})^2 + (3\sqrt{6})^2 = (6\sqrt{3})^2$$

$$\Delta A'OA \quad 9 \cdot 6 + 9 \cdot 6 = 36 \cdot 3$$

$$54 + 54 = 108 \text{ „A”}$$

$$\Rightarrow \angle A'OA = 90^\circ$$

$$(A'BC) \perp (AB'C')$$

