

Testul numărul 1

Subiectul I (30 puncte)

1. Rezultatul calculului $2026^0 + \sqrt{27} : \sqrt{3}$ este:

a) 2029

☒ b) 4

c) 10

d) 3

$$1 + \sqrt{9} = 1 + 3 = 4$$

2. Dacă $\frac{a+2}{15} = \frac{3}{5}$, atunci suma $a + 5$ este:

a) 7

b) 11

☒ c) 12

d) 14

$$a+2 = \frac{15 \cdot 3}{5} \Rightarrow a+2=9$$

$$a=7$$

$$a+5=12$$

3. Produsul numerelor întregi din intervalul $[\sqrt{3}; \sqrt{10}]$ este:

a) 15

b) 24

c) 0

☒ d) 6

$$\sqrt{3} < \sqrt{4} < \sqrt{9} < 10$$

$$\quad \quad \quad \begin{matrix} 4 & 9 \\ 2 & 3 \end{matrix}$$

4. Media geometrică a numerelor a și b , unde $a = (2 + \sqrt{3})^{2026} \cdot (7 + 4\sqrt{3})^{1013}$ și

$b = (2 - \sqrt{3})^{2026} \cdot (7 - 4\sqrt{3})^{1013}$ este:

☒ a) 1

b) 2026

c) 0

d) -1

$$m_g = \sqrt{(2+\sqrt{3})^{2026} \cdot (2-\sqrt{3})^{2026} \cdot (7+4\sqrt{3})^{1013} \cdot (7-4\sqrt{3})^{1013}}$$

$$m_g = \sqrt{1^{2026} \cdot 1^{1013}} = 1$$

5. Soluția inecuației $\frac{x+3}{3} - \frac{2x+5}{6} > \frac{x+4}{12}$ este:

a) $(4, \infty)$

b) $(0, 3)$

☒ c) $(-\infty, -2)$

d) $(1, 5)$

$$\cancel{4x+12} - \cancel{4x-10} > x+4$$

$$20 > x+4$$

$$x < -2 \Rightarrow x \in (-\infty; -2)$$

6. În tabel este prezentată înălțimea copiilor care joacă în echipa de baschet a școlii.

Afirmația : "Numărul elevilor care au cel mult 1,75 m este de 11." este

a) Adevărată

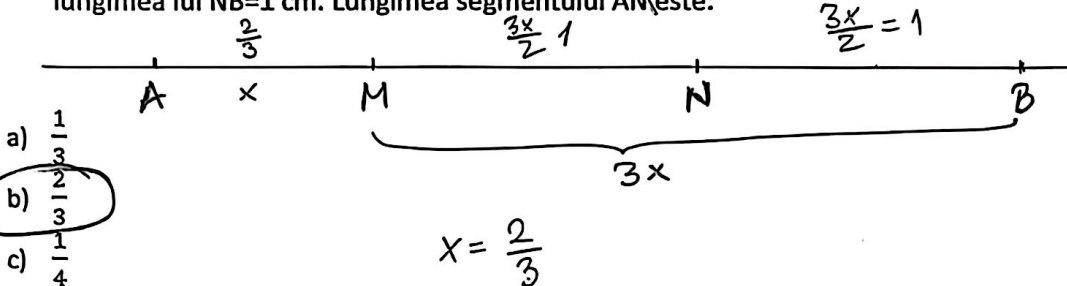
☒ b) Falsă

$$5+4=9 \neq 11.$$

Înălțime	1,70 m	1,75 m	1,80 m	1,85 m
Număr elevi	5	4	5	6

Subiectul II (30 puncte)

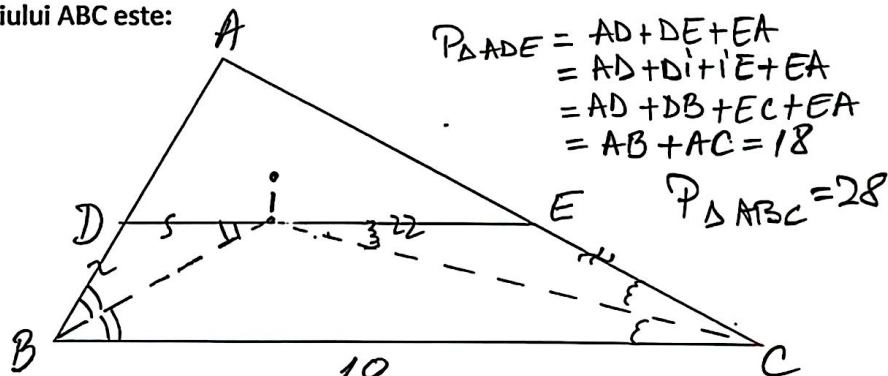
1. În figura de mai jos avem punctele A, M, N și B coliniare în această ordine. Lungimea segmentului AM este un sfert din lungimea segmentului AB, N este mijlocul lui MB, iar lungimea lui NB=1 cm. Lungimea segmentului AN este:



- a) $\frac{1}{3}$
b) $\frac{2}{3}$
c) $\frac{1}{4}$
d) $\frac{2}{5}$

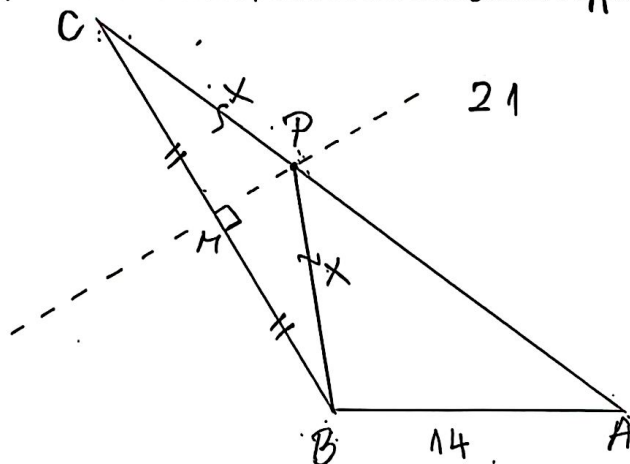
2. În triunghiul ABC, BI și CI sunt bisectoarele unghiurilor ABC, respectiv ACB. D ∈ AB și E ∈ AC, DE ∥ BC, I ∈ DE. Știm că BC=10 cm iar perimetrul triunghiului ADE este egal cu 18 cm. Perimetrul triunghiului ABC este:

- a) 20 cm
b) 38 cm
c) 24 cm
d) 28 cm



3. În triunghiul ABC avem AC=21 cm, AB=14 cm. Mediatoarea segmentului BC se intersectează cu latura AC în punctul P. Valoarea perimetrului triunghiului PBA este:

- a) 28 cm
b) 35 cm
c) 30 cm
d) 40 cm



$\triangle PBC$ is pt că
PH - mediată.

$\begin{cases} PC = PB \\ AC = CP + PA \end{cases} \Rightarrow 21 = PB + PA$

$P_{\triangle PBA} = 21 + 14 = 35.$

4. Fie un trapez oarecare ABCD. $M \in BC$ astfel încât $CM=MB$. Știm că aria triunghiului DAM este 60 cm^2 . Aria trapezului este:

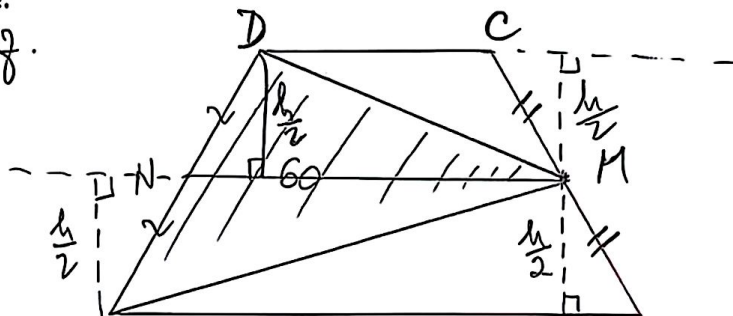
$$h = h_{\text{trapez}}$$

a) 120 cm^2

b) 90 cm^2

c) 100 cm^2

d) 150 cm^2



$$\begin{aligned} A_{ADM} &= A_{ADN} + A_{ANM} \\ &= \frac{l \cdot m \cdot \frac{h}{2}}{2} + \frac{l \cdot m \cdot \frac{h}{2}}{2} = \frac{l \cdot m \cdot h}{4} + \frac{l \cdot m \cdot h}{4} = \frac{2 l m h}{4} = \frac{l m h}{2} = 60 \Rightarrow l m \cdot h = 120 \\ &\quad \text{at } h = 120 \end{aligned}$$

5. Fie M mijlocul unei coarde AB a cercului $\mathcal{C}(O, r)$. Semidreapta OM intersectează $\mathcal{C}(O, r)$ în punctul N. Dacă $MN = 2 \cdot OM$ și $AB = 4\sqrt{2} \text{ cm}$, lungimea razei cercului este:

a) $3\sqrt{2} \text{ cm}$

b) 4 cm

c) 3 cm

d) 5 cm

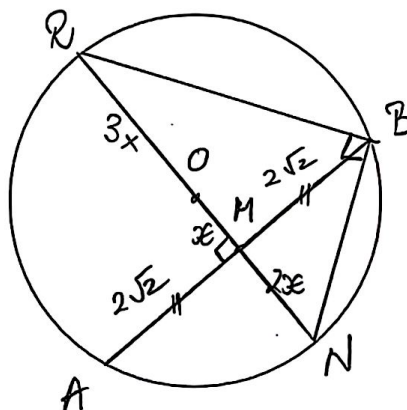
fix RM diam.

$$\Rightarrow \angle RBN = 90^\circ$$

$$\triangle RBN \text{ drept unghi } \widehat{B},$$

$$BM = h$$

$$\begin{aligned} T. h &\Rightarrow BM = 2x \cdot 4x \\ R &= 8x \Rightarrow x = 1 \\ &\Rightarrow R = 3 \end{aligned}$$



6. Știind că înălțimea conului este 4 cm , generatoarea acestuia este 5 cm . Valoarea cosinusului unghiului format de generatoare cu planul bazei este:

a) $\frac{4}{5}$

b) $\frac{3}{5}$

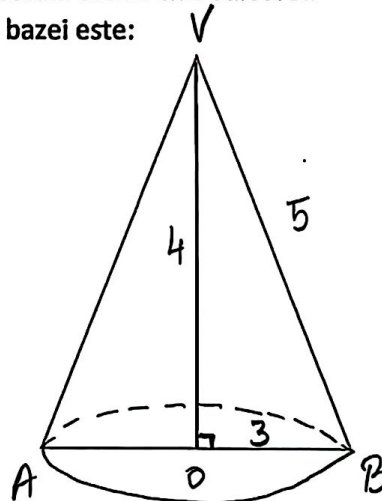
c) $\frac{4}{3}$

d) $\frac{3}{4}$

$\triangle VOB$ drept unghi $\widehat{O}$.

$$OB = 3 \text{ cm (T.P.H.)}$$

$$\begin{aligned} \cos \angle (VB, \text{plan}(O, r)) &= \cos \angle (VB, AB) \\ &= \cos \angle VBO = \frac{3}{5} \end{aligned}$$



$$b) m = E(2^2) + E(2^3) + E(2^4) + \dots + E(2^{2026}) \vdots 31$$

$$m = 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{2026}$$

$$n = 2^2 \cdot \underbrace{(1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{2024})}_S$$

$$S = \underbrace{1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \dots}_{31} + 2^{2024}$$

$\Rightarrow$ vom grupa tot câte 5 termeni din sumă consecutivi

$$\text{nr termeni} = 2025$$

$$2025 : 5 = 405 \text{ grupe complete}$$

$$S = (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) + (2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9) + \dots + (2^{2020} + 2^{2021} + 2^{2022} + 2^{2023} + 2^{2024})$$

$$S = 31 + 2^5 \cdot 31 + \dots + 2^{2020} \cdot 31$$

$$S = 31 \cdot (1 + 2^5 + \dots + 2^{2020})$$

$$m = 2^2 \cdot 31 \cdot (1 + 2^5 + \dots + 2^{2020}) \vdots 31 \text{ pt că } 31 \vdots 31.$$

3. Fie sistemul de axe XOY în care avem punctele A(3, 0); B(5, 2) și C(7, 4).

a) Verificați dacă aceste trei puncte sunt coliniare;

b) Fie P un punct aparținând axei OY astfel încât el să fie egal depărtat de punctele A și B.

Găsiți coordonatele acestui punct P.

a) verificăm dacă

$$AB + BC = AC.$$

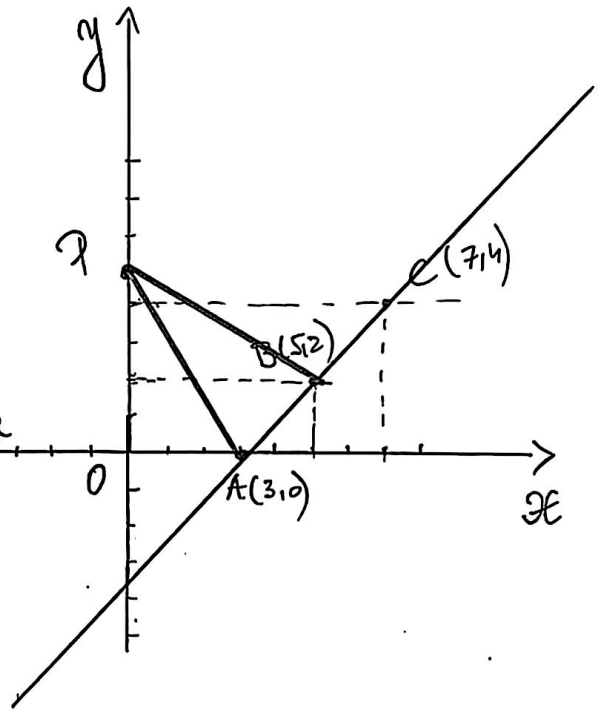
$$AB = \sqrt{(5-3)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \text{ u}$$

$$BC = \sqrt{(7-5)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \text{ u}$$

$$AC = \sqrt{(7-3)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \text{ u}$$

$$2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2} \text{ u}$$

$$\Rightarrow A - B - C.$$



b) $P \in Oy \Rightarrow x_P = 0 \Rightarrow P(0; y_P)$

$$AP = \sqrt{(0-3)^2 + (y_P-0)^2} = \sqrt{9+y_P^2}$$

$$BP = \sqrt{(5-0)^2 + (y_P-2)^2} = \sqrt{25+(y_P-2)^2}$$

$$AP = BP \Rightarrow 9 + y_P^2 = 25 + y_P^2 - 4y_P + 4$$

$$9 = 29 - 4y_P \Rightarrow 4y_P = 20 \Rightarrow y_P = 5$$

$$P(0; 5)$$

4. În figura alăturată avem un $\mathcal{C}(O, r)$ cu raza egală cu 5 cm, iar segmentul AB este diametrul cercului. AX și BY sunt tangente la cerc. Se ia un punct $M \in \mathcal{C}(O, r)$, tangenta la cerc prin punctul M intersectează celelalte două tangente în punctele N și P, $N \in AX$ și $P \in BY$.
- Calculați măsura unghiului NOP;
 - Calculați valoarea produsului AN·BP.

a) AX tang la cerc
 $\Rightarrow \widehat{NAO} = 90^\circ$
 BY tang. la cerc $\Rightarrow \widehat{PBO} = 90^\circ$
 NP - tang la cerc $\Rightarrow OM \perp NP$
 Comparăm $\triangle PMO$ $\begin{cases} OM = OB (r) \\ OP \text{ lat com} \end{cases}$
 $\Downarrow$ C.i.
 $\triangle PMO \equiv \triangle PBO \Rightarrow \begin{cases} \widehat{MOP} = \widehat{POB} (a^\circ) \\ MP = PB \\ \widehat{MPO} = \widehat{BPO} \end{cases}$

Analog comp $\triangle NOM$ C.i. $\Rightarrow \widehat{NOH} = \widehat{NOA} (b^\circ)$

AB diametru $\Rightarrow \widehat{AOB} = 180^\circ \Rightarrow 2b + 2a = 180^\circ$
 $b + a = 90^\circ \Rightarrow \widehat{NOP} = 90^\circ$

b) $\triangle POB$ de în $\widehat{B}$ $\Rightarrow \widehat{OPB} = b^\circ$ (complementul lui a°)
 $\widehat{POB} = a^\circ$

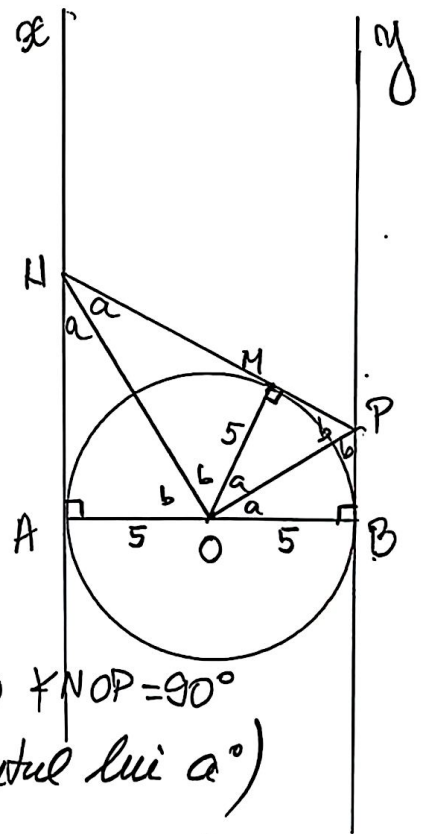
$\triangle NAO$ de în $\widehat{A}$ $\Rightarrow \widehat{ANO} = a^\circ$ (— u — b)
 $\widehat{NOA} = b^\circ$

$$\Rightarrow \triangle NAO \sim \triangle OBP \Rightarrow \frac{NA}{OB} = \frac{AO}{BP} = \frac{NO}{OP}$$

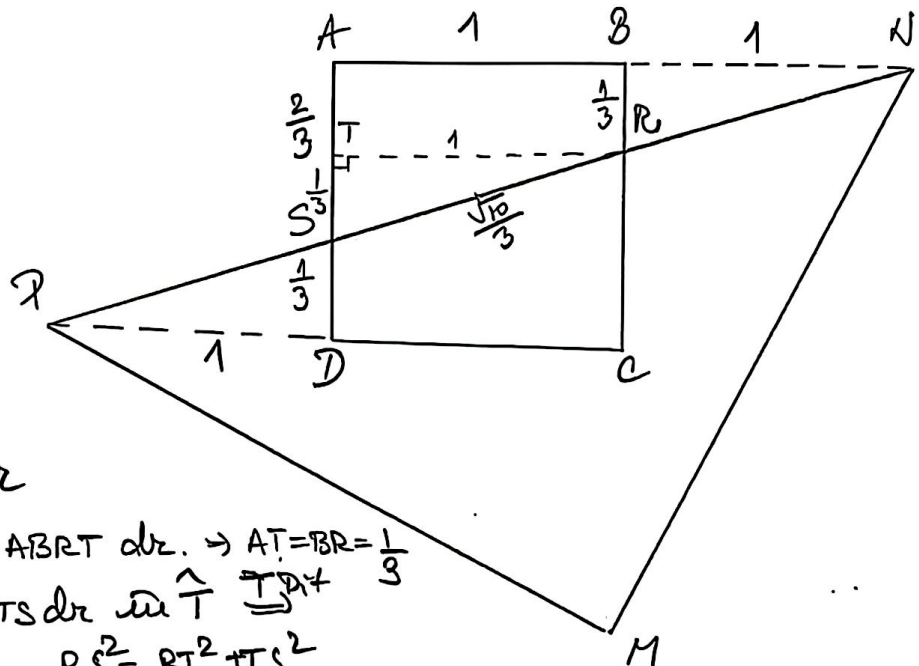
(U.U.)

$$NA \cdot BP = OB \cdot AO = 5 \cdot 5 = 25 \text{ (cm}^2\text{)}$$

A. Hollinger, 1982



5. Fie ABCD un pătrat cu latura de 1 cm, iar $\triangle MNP$ un triunghi dreptunghic isoscel cu măsura unghiului $M = 90^\circ$. Fie $AD \cap NP = \{S\}$ și $BC \cap NP = \{R\}$ astfel încât $SD = BR = \frac{1}{3}$ cm. Știm că $N \in AB$ și $P \in DC$.
- Calculați aria patrulaterului BRSA;
 - Calculați aria triunghiului MNP.



a) $\square ABRS$ trapez dr

fie $RT \perp AS \Rightarrow \square ABRT$ dr. $\Rightarrow AT = BR = \frac{1}{3}$

$AB = TR = 1 \Rightarrow \triangle RTS$ dr cu $\hat{T} \cong \hat{A}$

$$TS = \frac{1}{3}$$

$$RS^2 = RT^2 + TS^2$$

$$RS = \sqrt{1 + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{10}{9}} = \frac{\sqrt{10}}{3} \text{ (cm)}$$

$$A_{ABRS} = \frac{(B+b) \cdot h}{2} \Rightarrow A_{ABRS} = \frac{(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}) \cdot 1}{2} = \frac{1}{2} \text{ (cm}^2\text{)}$$

b) $\left. \begin{array}{l} BR \parallel AS \\ BR = \frac{AS}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow BR$ linie mijie în $\triangle NAS \Rightarrow B$ -unghi linie AN $\Rightarrow BN = 1$ cm.

Analog $PD = 1$ cm.

R -unghi linie SN

$$\Rightarrow RN = \frac{\sqrt{10}}{3} \Rightarrow SP = \frac{\sqrt{10}}{3} \Rightarrow PN = 3 \cdot \frac{\sqrt{10}}{3} = \sqrt{10} \text{ (cm)}$$

Inspirată din problemele domnului profesor Poenaru Dan, MathPDR

$$\left. \begin{array}{l} \triangle MNP \text{ dr is} \\ ip = \sqrt{10} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} ip = \text{cat} \sqrt{2} \\ \text{cat} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}} = \sqrt{5} \text{ (cm)} \end{array} \right\} \Rightarrow A_{\triangle MNP} = \frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}}{2} = \frac{5}{2} \text{ (cm}^2\text{)}$$

6. Fie VABCD o piramidă patrulateră regulată. Latura bazei $AB = 12$ cm, fie $\{O\} = AC \cap BD$ și $VO = 6$ cm.

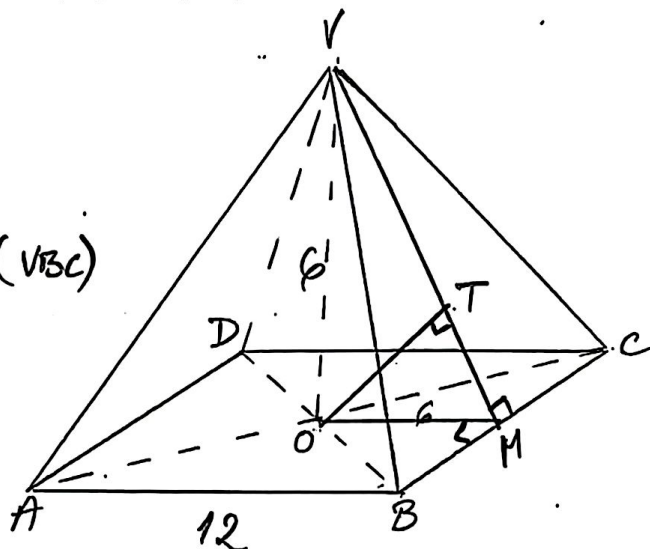
a) Calculați distanța de la centrul bazei piramidei la planul (VBC);

b) Arătați că piciorul perpendicularei din O pe planul (VBC) este ortocentrul ΔVBC .

a) fie M - mijl lui BC
 ΔVBC is $\Rightarrow VM \perp BC$.

fie $OT \perp VM$
 $VM \perp BC$
 $OM \perp BC$
 $VM, BC \subset (VBC)$

$\left. \begin{array}{l} \text{Reținem} \\ \text{Reținem} \end{array} \right\} \Rightarrow OT \perp (VBC)$



OT - h. în Δ dre. VOH

$VO = 6$
 $OM = 6$ (l. mijle în ΔCAB) $\Rightarrow VM = 6\sqrt{2}$ (cm)

$OT = \frac{VO \cdot OM}{VM} = \frac{6 \cdot 6}{6\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$ (cm).

b) $OT \perp (VBC) \Rightarrow OT \perp VC \Rightarrow VC \perp OT$ ①

$OB \perp OC$ (diagonale în pătrat)
 $OB \perp VO$
 $OC \cap VO = O$

$\left. \begin{array}{l} \Rightarrow OB \perp (VOC) \\ VC \subset (VOC) \end{array} \right\} \Rightarrow OB \perp VC \Rightarrow VC \perp OB$ ②

① ② $\left. \begin{array}{l} \Rightarrow VC \perp (OTB) \\ TB \subset (OTB) \end{array} \right\} \Rightarrow VC \perp TB \Rightarrow BT \perp VC$.

dar $VM \perp BC$

$BT \cap VM = \{T\} \Rightarrow T$ este ortocentrul ΔVBC